Corrigé continuité -dérivation

Exercice 1 Etude de fonctions définies par morceaux

$$\begin{cases} f(x) = 2 - x \text{ si } 0 \leq x < 1 \\ f(x) = x^2 + x - 1 \text{ si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Continuité sur [0 ; 1[et [1 ; 2]

sur [0 ; 1[

f est une fonction **affine** qui est continue sur ℝ donc elle est continue sur [0 ; 1[

sur [1 ; 2]

f est une fonction **polynomiale du second degré** qui est continue sur ℝ donc elle est continue sur [1 ; 2]

Continuité en 1

$f(1) = 1^2 + 1 - 1 = 1$

Limite à droite de 1

Puisque f est continue sur [1 ; 2] alors $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = f(1) = 1$

Limite à gauche de 1

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (2 - x) = 1 = f(1)$

Synthèse :

Puisque $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$ alors f est continue en 1

Puisque f est continue en 1 et sur [0 ; 1[et [1 ; 2] alors f est continue sur [0 ; 2]

Dérivabilité de f sur [0 ; 1[et [1 ; 2].

sur [0 ; 1[

f est une fonction **affine** qui est dérivable sur ℝ donc elle est dérivable sur [0 ; 1[

sur [1 ; 2]

f est une fonction **polynomiale du second degré** qui est dérivable sur ℝ donc elle est dérivable sur [1 ; 2]

Dérivabilité en 1

Soit $t(x) = \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ le taux d'accroissement relatif à f défini pour tout réel x de [0 ; 2] différent de 1

Limite du taux d'accroissement à droite de 1 :

$\lim\limits_{x \to 1^+} t(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^2 + x - 1 - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1}$ { tiens tiens FI $\dfrac{0}{0}$ locale, j'ai une expression rationnelle, alors je factorise}

$= \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{(x - 1)(x + 2)}{x - 1}$ {cours sur le trinôme $x_1 \times x_2 = \dfrac{c}{a}$ et $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$}

$= \lim\limits_{x \to 1^+} x + 2$

$= 3$

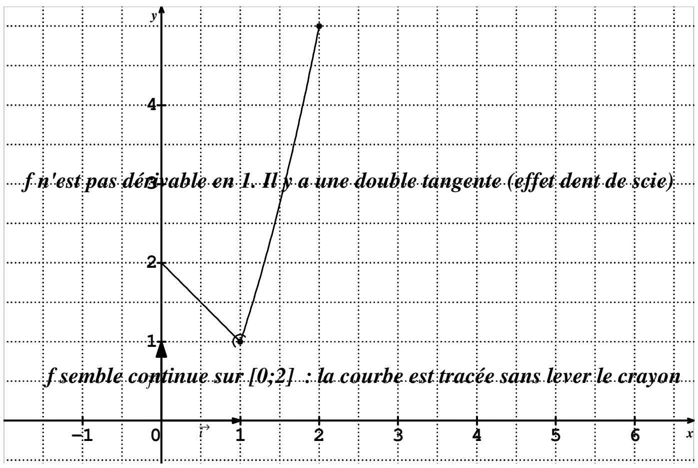
Limite du taux d'accroissement à gauche de 1 :

$\lim\limits_{x \to 1^-} t(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{2 - x - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{-(x - 1)}{x - 1} = -1$

Synthèse :

Puisque $\lim\limits_{x \to 1^-} t(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^+} t(x)$ alors f n'est dérivable pas en 1

f n'est pas globalement dérivable sur [0 ; 2]



$$\boxed{\begin{cases} f(x) = 3x + 1 \text{ si } 0 \leq x < 1 \\ f(x) = x^2 + x + 2 \text{ si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}}$$

Continuité sur [0 ; 1[et [1 ; 2]

sur [0 ; 1[

f est une fonction **affine** qui est continue sur ℝ donc elle est continue sur [0 ; 1[

sur [1 ; 2]

f est une fonction **polynomiale du second degré** qui est continue sur ℝ donc elle est continue sur [1 ; 2]

Continuité en 1

$f(1) = 1^2 + 1 + 2 = 4$

Limite à droite de 1

Puisque f est continue sur [1 ; 2] alors $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = f(1) = 4$

Limite à gauche de 1

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (3x + 1) = 4 = f(1)$

Synthèse :

Puisque $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$ alors f est continue en 1

Puisque f est continue en 1 et sur [0 ; 1[et [1 ; 2] alors f est continue sur [0 ; 2]

Dérivabilité de f sur [0 ; 1[et [1 ; 2].

sur [0 ; 1[

f est une fonction **affine** qui est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc elle est dérivable sur [0 ; 1[

sur [1 ; 2]

f est une fonction **polynomiale du second degré** qui est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc elle est dérivable sur [1 ; 2]

Dérivabilité en 1

Soit $t(x) = \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ le taux d'accroissement relatif à f défini pour tout réel x de [0 ; 2] différent de 1

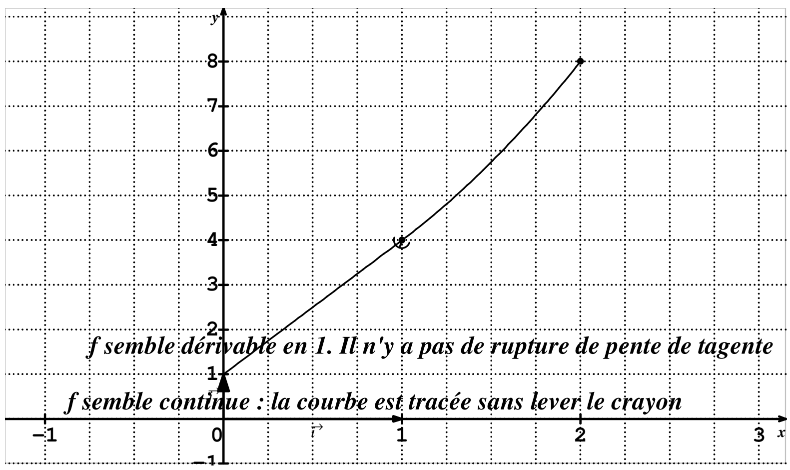
Limite du taux d'accroissement à droite de 1 :

$\lim\limits_{x \to 1^+} t(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^2 + x + 2 - 4}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1}$ { tiens tiens FI $\dfrac{0}{0}$ locale, j'ai une expression rationnelle, alors je factorise}

$= \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{(x - 1)(x + 2)}{x - 1}$ {cours sur le trinôme $x_1 \times x_2 = \dfrac{c}{a}$ et $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$}

$= \lim\limits_{x \to 1^+} x + 2$

$= 3$



Limite du taux d'accroissement à gauche de 1 :

$\lim\limits_{x \to 1^-} t(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{3x + 1 - 4}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{3(x - 1)}{x - 1} = 3$

Synthèse :

Puisque $\lim\limits_{x \to 1^-} t(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} t(x) = 3$

alors f est dérivable en 1 et $f'(1) = 3$

Puisque f est dérivable en 1 et sur [0 ; 1[et [1 ; 2]

alors f est dérivable sur [0 ; 2]

$$\boxed{\begin{cases} f(x) = \dfrac{x + 7}{4} \text{ si } 0 \le x < 1 \\ f(x) = \sqrt{x + 3} \text{ si } 1 \le x \le 2 \end{cases}}$$

Continuité sur [0 ; 1[et [1 ; 2]

sur [0 ; 1[

f est une fonction **affine** qui est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle est continue sur [0 ; 1[

sur [1 ; 2]

f est **la composée d'une fonction affine continue et positive sur [1 ; 2] par la fonction racine carrée qui est continue sur $\mathbb{R}_+$** donc f est continue sur [1 ; 2]

Continuité en 1

$f(1) = \sqrt{1 + 3} = 2$

Limite à droite de 1

Puisque f est continue sur [1 ; 2] alors $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = f(1) = 2$

Limite à gauche de 1

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x + 7}{4} = 2 = f(1)$

Synthèse :

Puisque $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$ alors f est continue en 1

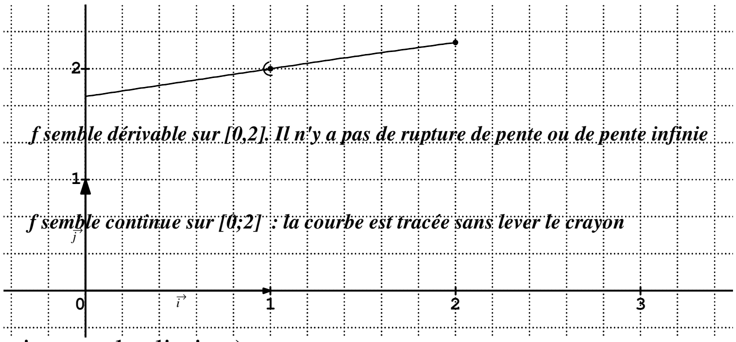
Puisque f est continue en 1 et sur [0 ; 1[et [1 ; 2] alors f est continue sur [0 ; 2]

Dérivabilité de f sur $[0 ; 1[$ et $[1 ; 2]$.
sur $[0 ; 1[$
f est une fonction **affine** qui est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc elle est dérivable sur $[0 ; 1[$
sur $[1 ; 2]$
f est **la composée d'une fonction affine dérivable et strictement positive sur $[1 ; 2]$ par la fonction racine carrée qui est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$** donc f est dérivable sur $[1 ; 2]$

Dérivabilité en 1
Soit $t(x) = \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ le taux d'accroissement relatif à f défini pour tout réel x de $[0 ; 2]$ différent de 1
Limite du taux d'accroissement à droite de 1 :

$\lim\limits_{x \to 1^+} t(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 1}$ {tiens tiens FI $\dfrac{0}{0}$ locale, j'ai une expression avec des racines, alors j'utilise la qtité conjuguée}

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 1} \times \frac{\sqrt{x+3} + 2}{\sqrt{x+3} + 2}$$
$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{x + 3 - 2^2}{(x-1)\left(\sqrt{x+3} + 2\right)}$$
$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{x - 1}{(x-1)\left(\sqrt{x+3} + 2\right)}$$
$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{\sqrt{x+3} + 2}$$



$= \dfrac{1}{4}$ (par composition et opérations élémentaires sur les limites)

Limite du taux d'accroissement à gauche de 1 :

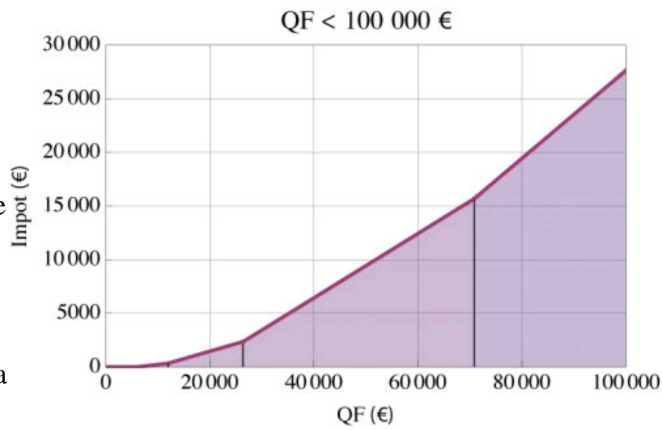
$$\lim_{x \to 1^-} t(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{\frac{x+7}{4} - 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{\frac{x+7}{4} - \frac{8}{4}}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{\frac{x-1}{4}}{x - 1} = \frac{1}{4}$$

Synthèse :
Puisque $\lim\limits_{x \to 1^-} t(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} t(x) = \dfrac{1}{4}$ alors f est dérivable en 1 et $f'(1) = \dfrac{1}{4}$
Puisque f est dérivable en 1 et sur $[0 ; 1[$ et $[1 ; 2]$ alors f est dérivable sur $[0 ; 2]$

Exercice 2 fonctions définies par morceaux , continuité et vie courante

Les tranches de revenu et le taux marginal d'imposition (source http://www.yterium.net/Comprendre-nos-impots)

Dans l'imaginaire populaire, changer de tranche de revenu est vécu comme un drame. Combien de fois a-t-on entendu parents ou proches s'inquiéter de savoir si telle ou telle augmentation de revenu n'allait pas les faire changer de tranche et donc payer soudain plus d'impôts ? Le plus simple, pour comprendre ce qu'il se passe, serait de tracer la courbe des impôts en fonction du revenu...ou plutôt du "quotient familial" (QF), parce qu'un même revenu n'est pas imposé de la même façon selon le nombre de personnes (parts) qu'il est censé faire vivre (nourrir). On appelle QF, le quotient du revenu par le nombre de parts et le nombre de parts est de 1 par adulte, et de 0,5 par enfant, sauf cas particuliers [1]. Il faut donc tracer la courbe des impôts payés en fonction du quotient familial (QF), et là on voit tout de suite qu'il n'y a aucun "saut" dans la courbe lorsqu'on change de tranche :

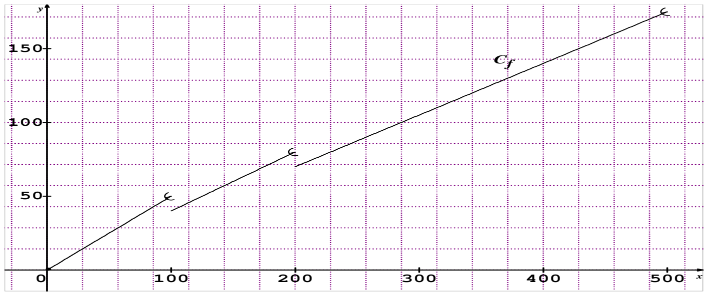


Impôt en fonction du Quotient Familial
Lecture : sur l'axe horizontal le QF. Un célibataire qui gagne 20 000 €/an paye environ 1 500 € d'impôts. Chaque changement de tranche se matérialise par un changement de la pente de la courbe.
En mathématique on dit que la courbe est "continue" : elle ne présente pas de cassure, on peut la tracer continûment sans lever le crayon . Par contre, elle n'est pas dérivable en chaque changement de tranche puis qu'il y a une rupture de pente.

Vente par tranches : tarifs dégressifs

Pour l'organisation d'une réception , un grossiste en boissons gazeuses propose les tarifs suivants (x en L) et $f(x)$ en €.

$\begin{cases} \text{Si } 0 \leq x < 100 \text{ alors } f(x) = 0{,}5x \\ \text{Si } 100 \leq x < 200 \text{ alors } f(x) = 0{,}4x \\ \text{Si } 200 \leq x \leq 500 \text{ alors } f(x) = 0{,}35x \end{cases}$



A l'évidence, dans ce contexte, il y a discontinuité en chaque changement de tranche.

Exercice 3 : le théorème de la bijection

Partie A : savoir raisonner à partir d'un tableau de variations

Cas 1

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	-3 ↘	-5	↗ 7

1) Sur $]-\infty, -3]$

f admet un maximum égal à -3 qui est strictement négatif donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution.

Sur $[-3, +\infty[$

f est définie, continue et strictement croissante. De plus, 0 est compris entre $f(-3)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution (notée α)

Conclusion :

Sur $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution (notée α)

2) Au regard du tableau de variations et de la question 1) on en déduit le tableau de signes de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

3) Au regard du tableau de variations on en déduit le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$ suivant les valeur de k

Valeur de k	Nombre de solutions de $f(x) = k$
$k < -5$	0
$k = -5$	1
$-5 < k \leq -3$	2
$-3 < k \leq 7$	1
$k > 7$	0

Cas 2

1) Sur $]-\infty, -3]$

f est définie, continue et strictement décroissante. De plus, 0 est compris entre $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $f(-3)$.

D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution (notée α)

Sur $[-3, +\infty[$

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	-2	↗ $+\infty$

f est définie, continue et strictement croissante. De plus, 0 est compris entre $f(-3)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution (notée β)

Conclusion :

Sur $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions (notées α et β)

2) Au regard du tableau de variations et de la question 1) on en déduit le tableau de signes de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3) Au regard du tableau de variations on en déduit le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$ suivant les valeur de k

Valeur de k	Nombre de solutions de $f(x) = k$
$k < -2$	0
$k = -2$	1
$k > -2$	2

Cas 3

1) Sur] - ∞ , 1]
f est définie , continue et strictement décroissante. De plus, 0 est compris entre $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $f(-1)$.
D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution (notée α)

Sur [- 1 , + ∞[
f admet un maximum égal à $-\dfrac{5}{2}$ qui est strictement négatif
donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	1		-5		$-\frac{5}{2}$		$-\infty$

Conclusion :
Sur $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution (notée α)

2) Au regard du tableau de variations et de la question 1) on en déduit le tableau de signes de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

3) Au regard du tableau de variations on en déduit le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$ suivant les valeur de k

Valeur de k	Nombre de solutions de $f(x) = k$
$k < -5$	1
$k = -5$	2
$-5 \le k < -\frac{5}{2}$	3
$k = -\frac{5}{2}$	2
$-\frac{5}{2} < k \le 1$	1
$k > 1$	0

Partie B : Etude des variations d'une fonction afin de déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$
On considère une fonction f dont l'expression est $f(x) = x^3 - 3x + 3$

1) f étant une fonction polynomiale, elle est bien sur définie sur $\mathbb{R}$ $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$
2) f étant une fonction polynomiale, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$
En vertu des règles de signes du trinôme du second degré ($a = 3 > 0$) , on déduit le tableau de variations de f ci-contre

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$							

3) Pour tout réel $x \neq 0$, $f(x) = x^3\left(1 - \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{3}{x^3}\right)$

{ qu'il y ait FI ou non, on peut utiliser cette forme très pratique pour les limites **au voisinage de - ∞ ou + ∞ , on ne l'utilise quasiment jamais localement (c'est à dire quand x tend vers a donné** }

En - ∞	En + ∞
Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^3} = 0$ alors $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}\right) = 1$	Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^3} = 0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}\right) = 1$
$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}\right) = 1 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty\end{array}\right\} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$	$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}\right) = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty\end{array}\right\} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

4) On en déduit aisément le tableau de variations complet de f

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$		5		1		$+\infty$

5) Sur] - ∞ , - 1]
f est définie , continue et strictement croissante.
De plus, 0 est compris entre $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $f(-1)$.
D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ admet

une unique solution (notée α)

<u>Sur [- 1 , + ∞[</u>

f admet un minimum égal à 1 qui est strictement positif donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution.

Conclusion :

Sur $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution (notée α)

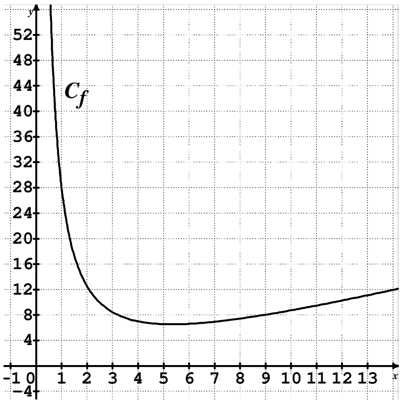
6) A l'aide de la calculatrice, par balayages successifs,

Puisque $f(-2,11) \approx -0,06 < 0$ et $f(-2,10) \approx 0,04 > 0$ alors $-2,11 < \alpha < -2,10$

7)

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		-	0	+	

<u>**Exercice 4 : Thème : usage de fonctions auxiliaires**</u>



PARTIE A

Soit g la fonction définie sur 3 par $g(x) = x^3 - 27x - 8$.

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$. (voir démarche similaire à ex3)

g est une fonction polynôme, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$g'(x) = 3x^2 - 27 = 3(x^2 - 9)$

Les racines de ce trinôme sont $-3 \notin \mathscr{D}_g$ et 3.

Donc $g'(x) > 0$ pour $x \in]3 ; +\infty[$.

et $g'(x) < 0$ pour $x \in [0 ; 3[$.

Tableau de variation de g.

x	0		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	-8	↘	-62	↗	$+\infty$

$g(0) = 0^3 + 3 \times 0^2 + 2$
$= 2$

$g(3) = (3)^3 - 3 \times 27 - 8 = -62$

2) • g est strictement décroissante sur [0 ; 3].

Pour tout x de [0 ; 3] , $g(x) \leq -8$ et $0 > -8$, l'équation $g(x) = 0$ n'admet donc pas de solution sur [0 ; 3].

g est continue sur $\mathbb{R}_+$ car g est une fonction polynôme.

• g est strictement croissante sur [3 ; + ∞ [.

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ et $g(3) = -62$; $0 \in [-62 ; +\infty[$

l'équation $g(x) = 0$ admet donc une unique solution α sur [3 ; + ∞ [.

3) pour $x \in [0 ; \alpha[$, $g(x) < 0$,

pour $x = \alpha$, $g(x) = 0$ et pour $x \in]\alpha ; +\infty[$, $g(x) > 0$.

PARTIE B

en 0	**en + ∞**
$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 0} 27x + 4 = 27 \\ \lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0^+\end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{27x+4}{x^2} = +\infty$ puisque $\lim\limits_{x \to 0} x - 4 = -4$ alors $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{27x+4}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{27x}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{27}{x} = 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} x - 4 = \infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

2) f est une fonction rationnelle, elle est dérivable sur $\mathscr{D}_f$.

$f(x) = x - 4 + \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = 27x + 4$; $v(x) = x^2$

$u'(x) = 27$; $v'(x) = 2x$

$\forall x \in D_f$,

$$f'(x) = 1 + \frac{27x^2 - 2x(27x+4)}{x^4} = 1 + \frac{-27x^2 - 8x}{x^4}$$

$$= 1 + \frac{-27x - 8}{x^3} = \frac{x^3 - 27x - 8}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3}$$

3) sur $\mathbb{R}_+^*$, $x^3 > 0$ donc $f'(x)$ est de même signe que $g(x)$
sur $]0 ; \alpha]$, $g(x) \leq 0$ donc $f'(x) \leq 0$ donc f est décroissante
sur $[\alpha ; +\infty[$, $g(x) \geq 0$ donc $f'(x) \geq 0$. donc f est croissante

RETOUR VERS LA DERIVATION

Ex 5 : vérifier la dérivabilité en un point

• $f : x \longmapsto (x-1)\sqrt{x-1}$ en 1

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h\sqrt{h}}{h} = \lim_{h\to 0} \sqrt{h} = \sqrt{0} = 0$$ donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = 0$

• $g : x \longmapsto \sin x\sqrt{x}$ en 0

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(h)-g(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \sqrt{h}\,\frac{\sin h}{h} = 0$$ car $\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ et $\lim_{h\to 0} \sqrt{h} = 0$ donc g est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$

• $u : x \longmapsto \sqrt{x^3 - x^2 - x + 1}$ en 1

$$\lim_{h\to 0} \frac{u(1+h)-u(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{(1+h)^3-(1+h)^2-(1+h)+1}-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h^3+2h^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}\sqrt{2+h}$$

Il faut donc distinguer deux cas :

Si $h \geq 0$ $\lim_{h\to 0} \frac{u(1+h)-u(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \sqrt{2+h} = \sqrt{2}$ Si $h \leq 0$, $\lim_{h\to 0} \frac{u(1+h)-u(1)}{h} = \lim_{h\to 0} -\sqrt{2+h} = -\sqrt{2}$

u n'est donc pas dérivable en 1. Par contre, elle admet une dérivée à droite et à gauche : $u_g'(1) = -\sqrt{2}$ $u_d'(1) = +\sqrt{2}$

Exercice 6 : du nouveau vers les limites ! limites de taux d'accroissements

Idée directrice loin d'être évidente :
D'habitude la limite du taux d'accroissement de f en a nous permet de démonter que f est (ou non) dérivable en a
Ici, nous allons voir que la fonction est dérivable sur un intervalle contenant a, donc, inutile de calculer la limite du taux d'accroissement de f en a pour calculer $f'(a)$ En effet, il est tellement plus commode de calculer $f'(x)$ et de remplacer x par a ! Ensuite nous allons utiliser la valeur trouvée pour en déduire la limite du taux d'accroissement de f en a
Illustration
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4$
1) calcule $f'(x)$ puis $f'(2)$
2) En déduire $\lim_{x\to 2} \frac{x^4-16}{x-2}$

Correction :
Pour tout réel x , $f'(x) = 4x^3$ ainsi $f'(2) = 4 \times 2^3 = 4 \times 8 = 32$
Observons tout d'abord que pour tout réel $x \neq 2$, $\frac{x^4-16}{x-2} = \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$
Ainsi $\lim_{x\to 2} \frac{x^4-16}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$
Or, d'après 1) nous savons que f est dérivable en 2 , nous en déduisons que $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = f'(2)$
Enfin, puisque $f'(2) = 32$, $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = 32$ puis $\lim_{x\to 2} \frac{x^4-16}{x-2} = 32$ et voilà !
Nous allons utiliser cette démarche pour déterminer les limites suivantes (en introduisant une fonction)

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{(2x+1)^4-81}{x-1}$ { tiens tiens une FI $\frac{0}{0}$ locale et double tiens tiens … on dirait une taux d'accroissement..}

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x+1)^4$
Observons tout d'abord que $\lim_{x\to 1} \frac{(2x+1)^4-81}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$
Puisque f est une fonction polynomiale (en développant), alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
D'autre, f est de la forme u^4 avec $u(x) = 2x + 1$ dont la dérivée est $u'(x) = 2$.
Ainsi, pour tout réel x, $f'(x) = 4 \times u'(x) \times (u(x))^3 = 8(2x+1)^3$
En particulier, $f'(1) = 8 \times 3^3 = 8 \times 27 = 116$
Puisque f est dérivable en 1, alors $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1) = 116$

Conclusion : $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(2x+1)^4 - 81}{x - 1} = 116$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{3x+1} - 2}{x - 1}$

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{3x+1}$ (nous allons la définir sur $\mathbb{R}_+$ afin que $3x + 1 > 0$)

Observons tout d'abord que $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{3x+1} - 2}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

f est la composée d'une fonction affine (dérivable sur $\mathbb{R}$) et strictement positif sur $\mathbb{R}_+$ par la fonction racine carrée qui est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$

D'autre, f est de la forme $\sqrt{u}$ avec $u(x) = 3x + 1$ dont la dérivée est $u'(x) = 3$.

Ainsi, pour tout réel $x \geq 0$, $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \dfrac{3}{2\sqrt{3x+1}}$

En particulier, $f'(1) = \dfrac{3}{4}$

Puisque f est dérivable en 1, alors $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = \dfrac{3}{4}$

Conclusion : $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{3x+1} - 2}{x - 1} = \dfrac{3}{4}$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^7 - 1}{x - 1}$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^7$

Observons tout d'abord que $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^7 - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

Puisque f est une fonction polynomiale, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, pour tout réel x, $f'(x) = 7x^6$

En particulier, $f'(1) = 7$

Puisque f est dérivable en 1, alors $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = 7$

Conclusion : $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^7 - 1}{x - 1} = 7$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sin x$

Observons tout d'abord que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$

Puisque f est la fonction sinus, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, pour tout réel x, $f'(x) = \cos x$

En particulier, $f'(0) = \cos(0) = 1$

Puisque f est dérivable en 0, alors $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 1$

Conclusion : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ (sens pratique : pour un angle ayant une mesure proche de zéro , le sinus de cet angle est environ égal à cet angle)

e) * $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^7 - 1}{x^4 - 1}$ {héhé , ce n'est pas un taux d'accroissement !}

mais « en bricolant » , $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^7 - 1}{x^4 - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^7 - 1}{x - 1} \times \dfrac{x - 1}{x^4 - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^7 - 1}{x - 1} \times \dfrac{1}{\dfrac{x^4 - 1}{x - 1}}$ (malin, non ?)

mais $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 1}{x - 1} = 4$ et $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^7 - 1}{x - 1} = 7$ (en s'inspirant du c) ou en démontrant de façon générale que $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^n - 1}{x - 1} = n$)

On en déduit que $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^7 - 1}{x^4 - 1} = 7 \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{7}{4}$

Exercice 7 : conjecturer , justifier …

f semble définie et continue sur $]-\infty ; 2]$. Par contre, elle ne semble ni dérivable en 0 (elle admet deux tangentes) ni en 2 (elle semble admettre une tangente verticale)
Je vous propose trois rédactions possibles pour les questions « par intervalle » (la dernière étant suffisante pour le bac …)

• Rédaction élégante utilisant « le langage naturel »

Ensemble de définition :
f est la composée d'une fonction polynomiale définie sur $\mathbb{R}$ par la fonction racine carrée définie sur $\mathbb{R}_+$. Par composition, f est définie ssi $-x^3 + 2x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2(-x+2) \geq 0$
$\Leftrightarrow -x + 2 \geq 0$ (positivité du carré)
$\Leftrightarrow x \leq 2$.
Ainsi $\mathscr{D}_f =]-\infty ; 2]$

Domaine de continuité
f est la composée d'une fonction polynomiale définie, continue sur $\mathbb{R}$ par la fonction racine carrée définie, continue sur $\mathbb{R}_+$. Par composition, f est continue sur $\mathscr{D}_f$

Domaine de dérivabilité
f est la composée d'une fonction polynomiale dérivable sur $\mathbb{R}$ par la fonction racine carrée dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Par composition, f est dérivable $-x^3 + 2x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2(-x+2) > 0$
$\Leftrightarrow -x + 2 > 0$ (et $x \neq 0$) (positivité du carré)
$\Leftrightarrow x < 2$. (et $x \neq 0$)
Ainsi, f est **assurément** dérivable sur $]-\infty ; 0[\cup]0 ; 2[$

• Rédaction élégante utilisant davantage « le langage mathématique»

Ensemble de définition :
$$\begin{aligned}\mathscr{D}_f &= \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2(-x+2) \geq 0\}\\ &= \{x \in \mathbb{R} \,/\, -x + 2 \geq 0 \text{ car } x^2 \geq 0\}\\ &= \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \leq 2\}\\ &=]-\infty ; 2]\end{aligned}$$

Domaine de continuité
Soit $\left\{\begin{array}{l} x \xmapsto{u} -x^3 + 2x^2 \\ ]-\infty , 2] = \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{l} x \xmapsto{v} \sqrt{x} \\ \mathrm{J} = \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \end{array}\right.$ Ainsi , $f = v \circ u$
u étant une fonction polynomiale, elle est continue (car dérivable) sur $\mathbb{R}$. Elle l'est donc en particuliers sur I
v étant la fonction racine carrée, elle est continue sur J

Ainsi, $\left.\begin{array}{r} u \text{ est continue sur I} \\ v \text{ est continue sur J} \\ u(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J} \end{array}\right\} \Rightarrow f$ est **assurément** continue sur I
(Remarque : le **assurément** n'est pas utile car il n'y a pas de points en lesquels il y a « litige »)

Domaine de dérivabilité
Soit $\mathrm{K} =]-\infty ; 0[\cup]0 ; 2[$ et $\mathrm{T} = \mathbb{R}_+^*$
u étant une fonction polynomiale, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$. Elle l'est donc en particuliers sur K
v étant la fonction racine carrée, elle est dérivable sur K
De plus, pour tout réel $x \in \mathrm{K}$, $u(x) > 0$. Ainsi $u(\mathrm{K}) \subset \mathrm{T}$

Ainsi, $\left.\begin{array}{r} u \text{ est dérivable sur K} \\ v \text{ est dérivable sur T} \\ u(\mathrm{K}) \subset \mathrm{T} \end{array}\right\} \Rightarrow f$ est **assurément** dérivable sur K
Ainsi, f est **assurément** dérivable sur $]-\infty ; 0[\cup]0 ; 2[$

• Rédaction souvent utilisée pour le bac

Ensemble de définition :
f est la forme $\sqrt{u}$ où $u(x) = -x^3 + 2x^2$

f est définie ssi $u(x) \geq 0$
Or $u(x) = x^2(-x+2)$
D'après le tableau de signes ci contre, $\mathcal{D}_f =]-\infty\,;2]$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x^2		$+$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$-x+2$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$x^2(-x+2)$		$+$	0	$+$	0	$-$	

<u>Domaine de continuité</u>
Puisque u est une fonction polynomiale continue sur $\mathbb{R}$ et puisque f est **assurément** continue si $u(x) \geq 0$ alors f est **assurément** continue sur $\mathcal{D}_f$ (d'après le tableau de signes ci-dessus)

<u>Domaine de dérivabilité</u>
Puisque u est une fonction polynomiale dérivable sur $\mathbb{R}$ et puisque f est **assurément** dérivable si $u(x) > 0$ alors, f est **assurément** dérivable sur $]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;2[$ (d'après le tableau de signes ci-dessus)

<u>Dérivabilité en 0</u>

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{-x^3+2x^2}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2(-x+2)}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2}\sqrt{-x+2}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}\times\sqrt{-x+2}$$

Du fait de la présence de la valeur absolue de x, deux cas doivent être distingués :

Si $x > 0$, $|x| = x$, ainsi $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x}\times\sqrt{-x+2} = \lim\limits_{x\to 0}\sqrt{-x+2} = \sqrt{2}$ (composition élémentaire)

Si $x < 0$, $|x| = -x$, ainsi $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{-x}{x}\times\sqrt{-x+2} = \lim\limits_{x\to 0} -\sqrt{-x+2} = -\sqrt{2}$ (composition élémentaire)

Puisque $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x} \neq \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}$ alors f n'est pas dérivable en 0

<u>Dérivabilité en 2</u>

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2}\sqrt{-x+2}}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2}\sqrt{-x+2}}{x-2}\times\frac{\sqrt{-x+2}}{\sqrt{-x+2}} = \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2}\,(-x+2)}{(x-2)\sqrt{-x+2}} = \lim_{x\to 2}\frac{-\sqrt{x^2}}{\sqrt{-x+2}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2} -\sqrt{x^2} = -2 \\ \lim\limits_{x\to 2}\sqrt{-x+2} = 0^+ \text{(positivité de la racine carrée)}\end{array}\right\}\quad \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = -\infty$$

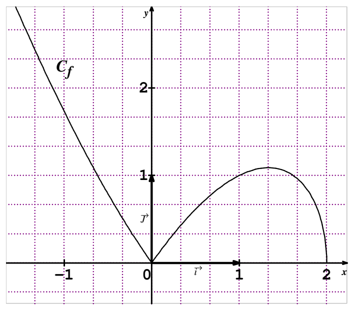
Puisque $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = -\infty$ alors f n'est pas dérivable en 2.

<u>**variations de f**</u>

D'après l'étude du domaine de dérivabilité, f est dérivable sur $K =]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;2[$ et est de la forme $\sqrt{u}$
Avec $u(x) = -x^3+2x^2$ qui admet pour dérivée $u'(x) = -3x^2+4x$

Ainsi, pour tout réel x de K, $f'(x) = \frac{-3x^2+4x}{\sqrt{-x^3+2x^2}} = \frac{x(-3x+4)}{\sqrt{-x^3+2x^2}}$

Or, pour tout réel x de K, $\sqrt{-x^3+2x^2} > 0$, ainsi $f'(x)$ est de même signe que $x(-3x+4)$
Enfin, $x(-3x+4)$ est la forme factorisée d'un trinôme du second degré dont les racines sont 0 et $\frac{4}{3}$ et en vertu des règles de signes sur le trinôme du second degré, on en déduit le tableau de variations de f



x	$-\infty$		0		$\frac{4}{3}$		2
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\searrow$	0

Remarques : $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -\infty} -x^3+2x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{U\to +\infty}\sqrt{U} = +\infty\end{array}\right\}$ par composition, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$ $\qquad f\left(\frac{4}{3}\right) = \left|\frac{4}{3}\right|\sqrt{-\frac{4}{3}+2} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$